Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (93), 2015

Краткие сообщения

УДК 512.542

О некоторых свойствах нильпотентных инъекторов

С.Ф. Каморников

Пусть $\mathfrak{N}$ – класс всех конечных нильпотентных групп. В работе доказывается, что для любого $\mathfrak{N}$-инъектора H в любой конечной разрешимой группе G существуют элементы $x, y \in G$ такие, что $H \cap H^x \cap H^y = F(G)$.

Ключевые слова: конечная разрешимая группа, подгруппа Фиттинга, нильпотентный инъектор.

Let $\mathfrak{N}$ be the class of all finite nilpotent groups. In the paper it is proved that for any $\mathfrak{N}$-injector H in any finite soluble group G there exist elements $x, y \in G$ such that the equality $H \cap H^x \cap H^y = F(G)$ holds.

Keywords: finite soluble group, Fitting subgroup, nilpotent injector.

В работе рассматриваются только конечные разрешимые группы и термин «группа» всегда означает «конечная разрешимая группа». Нами используются определения и обозначения, принятые в [1].

В работе дается положительный ответ на следующий вопрос:

Существует ли такая абсолютная константа k, что для любого нильпотентного инъектора H любой группы G найдется k сопряженных с H подгрупп, пересечение которых равно подгруппе Фиттинга $F(G)$ группы G?

По сути, ввиду сопряженности нильпотентных инъекторов речь идет о возможности представления подгруппы Фиттинга $F(G)$ группы G в виде пересечения ограниченного числа ее нильпотентных инъекторов.

Ниже мы показываем, что отмеченная константа k существует и равна трем. Напомним основные определения.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*инъектором*, если для любой субнормальной подгруппы N группы G пересечение $H \cap N$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в N. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп, то $\mathfrak{N}$-инъектор группы G мы называем *нильпотентным инъектором*.

Концепция $\mathfrak{F}$-инъектора была введена в 1967 г. Фишером, Гашюцом и Хартли в работе [2]. Здесь они доказали, что класс групп $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга тогда и только тогда, когда каждая группа обладает $\mathfrak{F}$-инъектором. Кроме того, в [2] для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ установлены и другие свойства $\mathfrak{F}$-инъекторов; в частности, доказано, что в каждой группе любые два $\mathfrak{F}$-инъектора сопряжены.

Непустой класс $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он удовлетворяет следующим требованиям:

1) $\mathfrak{F}$ – нормально наследственный класс;

2) из $G = AB$, где $A \triangleleft G$, $B \triangleleft G$, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Очевидно, что класс $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп является классом Фиттинга. Поэтому в соответствии с [2] любая конечная разрешимая группа обладает единственным классом нильпотентных инъекторов.

Наша главная цель – доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Если* H *– нильпотентный инъектор группы* G*, то справедливы следующие утверждения:*

1) $H \cap H^x \cap H^y = F(G)$ *для некоторых элементов* x *и* y *из* G;

2) $|H| \le \sqrt[3]{|G|^2 \cdot |F(G)|}$ *и* $|H / F(G)| \le |G : H|^2$.

Доказательство. 1) Так как подгруппа H нильпотентна, то ввиду [3] в группе G найдутся элементы x и y такие, что $H \cap H^x \cap H^y \subseteq F(G)$. С другой стороны, из определения нильпотентного инъектора следует, что $H \cap F(G)$ – $\mathfrak{N}$-максимальная подгруппа в $F(G)$. А так как подгруппа $F(G)$ нильпотентна, то $H \cap F(G) = F(G)$ и $F(G) \subseteq H$. Очевидно, подгруппы H^x и H^y также являются нильпотентными инъекторами группы G. Поэтому аналогично имеем, что $F(G) \subseteq H^x$ и $F(G) \subseteq H^y$. Следовательно, $F(G) \subseteq H \cap H^x \cap H^y$. Утверждение 1) теоремы доказано.

2) Пусть $\alpha : G \to G / F(G)$ – естественный гомоморфизм. Используя элементарное равенство $|A \cdot B| = \dfrac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|}$, где A и B – подгруппы группы G, для нильпотентного инъектора H и элементов $x, y \in G$, получаем

$$|\alpha(G)| \ge |\alpha(H) \cdot \alpha(H^x)| = \frac{|\alpha(H)| \cdot |\alpha(H^x)|}{|\alpha(H) \cap \alpha(H^x)|} =$$

$$= \frac{|\alpha(H)| \cdot |\alpha(H^x)| \cdot |\alpha(H^y)|}{|\alpha(H) \cap \alpha(H^x) \cap \alpha(H^y)| \cdot |(\alpha(H) \cap \alpha(H^x)) \cdot \alpha(H^y)|} \ge$$

$$\ge \frac{|\alpha(H)| \cdot |\alpha(H^x)| \cdot |\alpha(H^y)|}{|\alpha(H) \cap \alpha(H^x) \cap \alpha(H^y)| \cdot |\alpha(G)|} = \frac{|\alpha(H)|^3}{|\alpha(G)|}.$$

Отсюда имеем неравенства $|H / F(G)|^3 \le |G / F(G)|^2$ и $|H| \le \sqrt[3]{|G|^2 \cdot |F(G)|}$. С другой стороны, из неравенства $|H / F(G)|^3 \le |G / F(G)|^2$ следует, что $|H / F(G)| \le |G : H|^2$. Теорема доказана.

Замечание 1. Приведенные в утверждении 2) оценки являются точными. Равенства в них достигаются, например, если группа G является нильпотентной (в этом случае нильпотентный инъектор H совпадает с G).

Замечание 2. Приведенная теорема дополняет следующий известный результат Пассмана из [4]: *в каждой группе* G *всегда найдутся три силовские* p*-подгруппы, пересечение которых равно* $O_p(G)$. Отметим, что любая силовская p-подгруппа группы G является ее $\mathfrak{N}_p$-инъектором, где $\mathfrak{N}_p$ – класс всех p-групп.

Следующее представление подгруппы $O_p(G)$ легко выводится из теоремы:

Пусть H *– нильпотентный инъектор группы* G *и* P *– силовская* p*-подгруппа из* H*. Тогда существуют элементы* $x, y \in G$ *такие, что* $P \cap P^x \cap P^y = O_p(G)$.

Замечание 3. Пусть $H = [V]D_8$ – полупрямое произведение элементарной абелевой группы V порядка 9 и группы диэдра D_8, действующей точно на V. Пусть W – точный и неприводимый $F_2[H]$-модуль над полем F_2 из двух элементов (такой модуль существует по теореме B.10.3 из [1]). Рассмотрим группу $G = [W]H$. В ней силовская 2-подгруппа $P = WD_8$ является нильпотентным инъектором. При этом $W = F(G) \subset P \cap P^x$ для любого элемента $x \in G$. Таким образом, не в каждой группе можно подобрать два нильпотентных инъектора так, чтобы их пересечение давало подгруппу Фиттинга этой группы. Как показывает теорема, в общем случае необходимы три нильпотентных инъектора.

Замечание 4. В [5] Фёрстер доказал, что нильпотентные инъекторы существуют в любой конечной группе (а не только в разрешимой, как это следует из [2]). В связи с этим результатом возникает задача распространения приведенной теоремы на класс всех конечных групп.

Открытый вопрос: *Если H – нильпотентный инъектор произвольной конечной группы G, то верно ли, что существуют элементы $x, y \in G$, для которых справедливо равенство $H \cap H^x \cap H^y = F(G)$?*

Литература

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New-York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

2. Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Vol. 102. – P. 337–339.

3. Зенков, В.И. О пересечениях троек нильпотентных подгрупп в разрешимых конечных группах / В.И. Зенков // Сиб. электрон. матем. изв. – 2014. – Т. 11. – С. 207–209.

4. Passman, D.S. Groups with normal solvable Hall p'-subgroups / D.S. Passman // Trans. Amer. Math. Soc. – 1966. – V. 123, № 1. – P. 99–111.

5. Förster, P. Nilpotent injectors in finite groups / P. Förster // Bull. Astral. Math. Soc. – 1985. – Vol. 32, № 4. – P. 293–297.

Гомельский филиал Международного
университета «МИТСО»

Поступила в редакцию 10.09.2015